1ères Maths DS $n°1$ **samedi 23 novembre 2024** **Durée 1h30**

Calculatrice autorisée en **mode examen** **Total sur 20 points**

Exercice 1 [4 points]

On pose :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{13}\right), B = \cos\left(\frac{\pi}{25}\right) - \sin\left(\frac{23\pi}{50}\right)$$

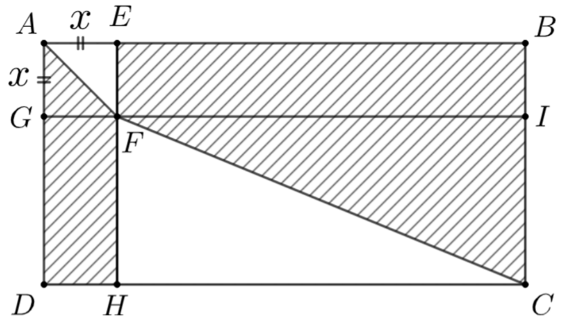
$$\text{et } C = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{7}\right)$$

Montrer que $A = 0$, $B = 0$, et $C = 0$

Exercice 2 [10 points] [source=?]

Soit $ABCD$ un rectangle de côtés 10 cm et 5 cm. $AEFG$ est un carré de côté x et $FICH$ est un rectangle.

On note $f(x)$ l'aire de la partie blanche.



1. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f ?
2. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a : $f(x) = x^2 - \frac{15}{2}x + 25$.
3. Étudier les variations de f.
4. En déduire pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire blanche est minimale.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire blanche est égale :

   a. à la moitié de l'aire du rectangle $ABCD$ **b.** au quart de l'aire du rectangle $ABCD$.

Exercice 3 [4 points]

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, on veut étudier la position relative de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 2x^2 - 3x + 5$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 5x - 3$.

1. Déterminer le (les) point(s) d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.
2. Pour tout réel x, on pose : $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ et $g(x) = 5x - 3$.
   a. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
   b. En déduire la position relative de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 4 [2 points]

Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent :

pour l'une : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, et pour l'autre : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Ces résultats sont-ils contradictoires ?

Corrigé Thiaude
Exercice 1

$$\boldsymbol{A = \cos\left(\frac{\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{13}\right)}$$
$$\boldsymbol{B = \cos\left(\frac{\pi}{25}\right) - \sin\left(\frac{23\pi}{50}\right)}$$
$$\boldsymbol{C = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{7}\right)}$$

Montrer que $\boldsymbol{A = 0}$, $\boldsymbol{B = 0}$, et $\boldsymbol{C = 0}$

• calcul de A
On a :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{13}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{13}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{13}\right)$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, donc :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{13}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{13}\right) = 0$$

on a donc bien : $\boldsymbol{A = 0}$.

• calcul de B
On a :

$$B = \cos\left(\frac{\pi}{25}\right) - \sin\left(\frac{23\pi}{50}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{25}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{25}\right)$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$, donc :

$$B = \cos\left(\frac{\pi}{25}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{25}\right) = 0$$

On a donc bien : $\boldsymbol{B = 0}$.

• calcul de C
On a :

$$C = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right)$$

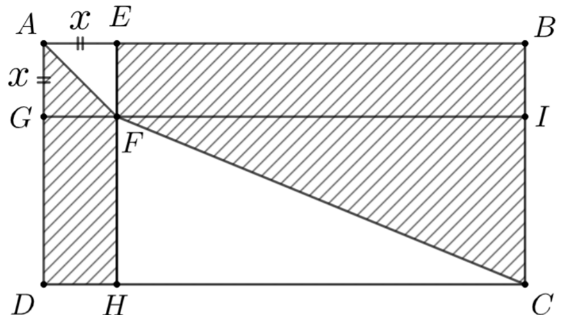
or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, donc :

$$C = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 0 + 0 = 0$$

On a donc bien : $\boldsymbol{C = 0}$.

Exercice 2

$ABCD$ rectangle de côtés $10\ cm$ et $5\ cm$, $AEFG$ carré de côté x, $FICH$ est un rectangle.
$f(x)$ est l'aire de la partie blanche :



1. **Quel est l'ensemble de définition de f ?**
   $f(x)$ existe si et seulement si $AG \leqslant 5$ et $AE \leqslant 10$, c'est-à-dire : $0 \leqslant x \leqslant 5$ et $0 \leqslant x \leqslant 10$
   soit finalement $[0;5]$. On a donc :$\boldsymbol{\mathcal{D}_f = [0;5]}$.

2. **Montrer que l'expression de f est égale à : $\boldsymbol{f(x) = x^2 - \frac{15}{2}x + 25}$.**

$$\mathcal{A}_{AEFG} = \frac{1}{2}x^2$$
$$\mathcal{A}_{HCF} = \frac{1}{2} \times HC \times HF = \frac{1}{2}(10-x)(5-x) = \frac{1}{2}(50 - 10x - 5x + x^2) = \frac{1}{2}(x^2 - 15x + 50)$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{50}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + 25$$

On a donc :

$$\mathcal{A}_{AEFG} + \mathcal{A}_{HCF} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + 25 = x^2 - \frac{15}{2}x + 25$$

On a donc bien : $\forall \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{0};\boldsymbol{5}], \boldsymbol{f(x) = x^2 - \frac{15}{2}x + 25}$

3. **Étudier les variations de f.**

$x^2 - \frac{15}{2}x + 25$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -\frac{15}{2}$ et $c = 25$.
On a :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{+\frac{15}{2}}{2(1)} = \frac{15}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{4}$$

$a > 0$ donc :

•f est (strictement) décroissante sur $[0;\alpha]$ c'est-à-dire sur $\left[0;\frac{15}{4}\right]$

• f est (strictement) croissante sur $[\alpha;5]]$ c'est-à-dire sur $\left[\frac{15}{4};5\right]$

4. **En déduire pour quelle valeur de x l'aire blanche est minimale.**

Le sens de variation de f sur $[0;5]$ montre que l'aire blanche est minimale pour $x = \frac{15}{4}$.

<u>Complément</u> :
L'aire minimale est $\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{175}{16} = 10{,}9375$.

5. **Pour quelle valeur de x l'aire blanche est égale :**
   a. **à la moitié de l'aire du rectangle $ABCD$**
   Il s'agit de résoudre dans [0 ;5] l'équation

$$f(x) = \frac{10 \times 5}{2} \Leftrightarrow x^2 - \frac{15}{2}x + 25 = 25 \Leftrightarrow x^2 - \frac{15}{2}x = 0 \Leftrightarrow x\left(x - \frac{15}{2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ \ ou\ \ x - \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ou\ x = \frac{15}{2}$$

Or, $0 \in [0;5]$ donc est accepté et $\frac{15}{2} \notin [0;5]$ donc est refusé.

Conclusion

L'aire blanche est égale à la moitié de celle du rectangle $ABCD$ lorsque $x = 0$.

Complément :

On a alors $E = F = G = A$.

b. au quart de l'aire du rectangle $ABCD$

Il s'agit de résoudre dans $[0;5]$ l'équation $f(x) = \frac{50}{4}$ c'est-à-dire $f(x) = \frac{25}{2}$

$$x^2 - \frac{15}{2}x + 25 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{50}{2} - \frac{25}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{25}{2} = 0$$

$x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{25}{2}$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -\frac{15}{2}$ et $c = \frac{25}{2}$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{15}{2}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{25}{2}\right) = \frac{25}{4}$$

$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+\frac{15}{2} - \sqrt{\frac{25}{4}}}{2(1)} = \frac{\frac{15}{2} - \frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{2} \in [0;5]$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+\frac{15}{2} + \sqrt{\frac{25}{4}}}{2(1)} = \frac{\frac{15}{2} + \frac{5}{2}}{2} = \frac{10}{2} = 5 \in [0;5]$$

Conclusion

Il y a deux valeurs de x pour lesquelles l'aire de la zone blanche est égale au quart de celle du rectangle $ABCD$: $\frac{5}{2}$ et 5.

Complément :

Pour $x = \frac{5}{2}$ le point G est le milieu de $[AD]$, pour $x = 5$ les points G et D sont confondus.

Exercice 3

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, on veut étudier la position relative de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 2x^2 - 3x + 5$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 5x - 3$.

1. **Déterminer le (les) point(s) d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.**

   $M(x;y)$ est un point commun à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si $y = 2x^2 - 3x + 5$ et $y = 5x - 3$, d'où

   $2x^2 - 3x + 5 = 5x - 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5x + 5 + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 4x + 4) = 0$

   $\Leftrightarrow 2[(x)^2 - 2(x)(2) + (2)^2] = 0 \Leftrightarrow 2(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

   On a alors : $y = 5(2) - 3 = 10 - 3 = 7$

   On peut aussi utiliser $\mathcal{P}$: $2(2)^2 - 3(2) + 5 = 2 \times 4 - 6 + 5 = 8 - 1 = 7$.

   Conclusion

   $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ ont un seul point en commun : $I(2;7)$.

2. **Pour tout réel x, on pose : $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ et $g(x) = 5x - 3$.**

   a. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

   Pour tout $x \in [0;5]$, on a : $f(x) - g(x) = 2(x-2)^2$ qui est toujours positif ou nul et s'annule pour $x = 2$.

   b. En déduire la position relative de la parabole et de la droite.

   On en déduite que **$\mathcal{P}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$,** $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ ont un seul **point commun $I(2;7)$**.

<u>Exercice 4</u>
Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent :

$$\textbf{pour l'une : } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}, \textbf{ et pour l'autre : } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Ces résultats sont-ils contradictoires ?

On pose :

$$A = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \text{ et } B = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Remarquons d'abord que $A > 0$ et $B > 0$.
On a d'une part :

$$A^2 = \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}{2^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

et d'autre part on a :

$$B^2 = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{4^2} = \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2 - 2\sqrt{6}\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2}{16} = \frac{6-2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}{16} = \frac{8-2\sqrt{3}\times\left(\sqrt{2}\right)^2}{16}$$

$$= \frac{8-4\sqrt{3}}{16} = \frac{4\times\left(2-\sqrt{3}\right)}{4\times 2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

On constate que A et B ont des carrés égaux donc ils sont égaux ou opposés.
Or, ils sont de même signes par conséquent ils ne peuvent pas être opposés, par conséquent ils sont égaux.

<u>Conclusion</u>
Les valeurs proposées par les deux calculatrices ne sont pas contradictoires.